Examen de Análisis de Variable Compleja
19 de diciembre de 2000

1. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0<\varepsilon<R)$, calcúlese la integral
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)^2}\,dx$$
donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<3$ y $\alpha\neq 1$.

2. Determinar el número de ceros del polinomio $P(z)=z^9-7z^6+z^5-2z^3-3$.

   a) En el anillo $A(0;1,2)$;

   b) En el semiplano de la derecha.

3. Sea f una función holomorfa en el semiplano superior $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ y tal que $|f(z)|\leqslant 1$ para todo $z\in\Omega$ y $f(i)=0$. ¿Cual es el mayor valor que puede tener $|f(2i)|$?

4. *a*) Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Pruébese que si la parte real de f está mayorada o minorada en un entorno reducido de a entonces f es regular en a.

   b) Dedúzcase que si f tiene una singularidad en a entonces $exp\,(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

5. ¿Puede existir una función $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $\lim\limits_{z\to w}f(z)=\infty$ para todo número complejo w con $|w|=1$?

Para aprobar hay que hacer ***bien*** tres ejercicios. El ejercicio 1 es obligatorio.

Sugerencias:
Ejercicio 1. No es una sugerencia sino un consejo: *justifica* en pocas líneas la aplicación del teorema de los residuos (qué función integras, en qué abierto trabajas, singularidades, etc.) y haz los cálculos con claridad y sin equivocarte.
Ejercicio 2. Típica aplicación del teorema de Rouché y del principio del argumento. ¡No te equivoques al calcular las potencias de $-i$!
Ejercicio 3. Lema de Schwarz y transformación de Möbius.
Ejercicio 4. Usa la descomposición canónica de f en la singularidad aislada a y recuerda que hay muchas formas de probar que una función entera es constante.
Ejercicio 5. *Justifica que puede suponerse que f no se anula* y considera $g=1/f$. Extiende g a una función continua en $\overline{D(0,1)}$. Lo que sigue es fácil.